CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1984

•

CONCOURS SCIENCES

CALCUL NUMERIQUE

Durée : 2 heures

Samedi 5 mai 1984 de 14 heures à 16 heures

•

Le candidat est invité à préciser les moyens de calcul qu'il utilise (règle ou cercle à calcul, tables numériques, calculette avec ou sans fonctions mathématiques, programmable ou non), en indiquant la précision que lui procurent ces outils. Les calculs seront présentés dans des tableaux clairs où figureront tous les résultats intermédiaires.

On se propose de calculer une approximation aussi précise que possible de la constante d'Euler :

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} 1/i - \text{Log } n \right) .$$

où Log n représente le logarithme népérien de n .

Afin d'uniformiser les notations, on posera :

$$(\mathcal{R}) \quad \begin{cases} V_n = 1/n - \text{Log}(1 + 1/n) , \quad R_n = R_{n-1} + 1/n \quad \text{et} \quad S_n = S_{n-1} + V_n , \quad \forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} . \\ \text{avec } R_0 = S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_n = R_n - \text{Log}(1 + n) , \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

D'autre part, à toute suite W de terme général W_n , on associe la suite W' de terme général $W'_n = W_{n+1} - W_n$ et la suite W'' de terme général $W''_n = W'_{n+1} - W'_n$.

1) Calcul des sommes partielles.

a) Etablir la convergence de la série de terme général V_n .

b) Expliciter les nombres R_n , S_n et C_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comment sont-ils liés ?

c) Utiliser les relations $(\mathcal{R})$ pour calculer R_n , S_n et C_n pour $n = 1, 2, \ldots, 7$.

d) Des deux valeurs S_n et C_n , peut-on dire laquelle est la plus fiable, laquelle correspond au calcul le plus rapide ? Justifier brièvement les réponses.

2) Amélioration des résultats.

Sans chercher à établir ou à justifier les formules qui suivent, on calculera :

a) $$T_n = S_{n+2} + \frac{S'_{n+1} \; S'_{n+2} \; S''_n}{S'_n \; S''_{n+1} - S'_{n+2} \; S''_n} \qquad \text{pour} \quad n = 0 , 1 , 2 , 3 \text{ et } 4 .$$

b) $$U_n = T_{n+2} + \frac{T'_{n+1} \; T'_{n+2} \; T''_n}{T'_n \; T''_{n+1} - T'_{n+2} \; T''_n} \qquad \text{pour} \quad n = 0 \text{ et } 1 .$$